WWW.METEOFOOT.COM

Comment les bookmakers (ou la FdJ) font-ils pour TOUJOURS gagner?

1 Introduction

On suppose, bien entendu, que la question posée concerne des matches de football entre deux équipes, et que trois résultats sont possibles : gain de la première équipe, match nul ou gain de la deuxième équipe (résultats conventionnellement notés 1, N ou 2 respectivement).

On va par la suite s'intéresser à UN match, en essayant de reproduire le raisonnement que les sociétés de paris suivent (ou devraient suivre) pour gagner à tout coup, le raisonnement se généralisant sans peine à tous les matches quels qu'ils soient.

Pour répondre à la question, plusieurs éléments sont nécessaires.

Tout d'abord, le bookmaker (ou la FdJ) doit commencer par se faire sa propre idée des probabilités de résultats : le jeu est quand même quelque part un défi entre le bookmaker ou la FdJ (qui veut plumer le joueur) et le joueur qui ne souhaite pas se laisser faire, s'estime plus malin que le bookmaker (ou s'efforce de l'être) et veut bien entendu récupérer sa mise (et plus si possible).

Ensuite, il faut connaître les répartitions de jeux entre les différents résultats possibles (1,N ou 2) sur l'ensemble des parieurs : d'une part la répartition des paris, c'est évident, mais aussi la répartition des mises, et c'est encore plus important. Par exemple, 50% des joueurs peuvent jouer "petit" sur un résultat, et 10% des parieurs de très grosses mises sur un autre résultat. Au bilan, le deuxième résultat sera alors peut être le plus joué, et c'est ce qui compte finalement pour le bookmaker (ou la FdJ) pour estimer son risque et ses chances de bénéfices.

Compte tenu de toutes ces considérations, décortiquer la logique de réflexion des bookmakers, ou tout au moins celle qu'ils devraient suivre à notre sens, va nécessiter quelques notations et quelques développements mathématiques.

Le webmaster tient à avertir les âmes sensibles que ce qui suit peut éventuellement leur causer quelques tourments. Les autres pourront poursuivre leur lecture (avec quelques cachets d'aspirine à portée de la main).

2 Notations et variables

		Connu		
Notations	signification	Par les joueurs	Par les bookmakers	par la FdJ
N	nombre total de parieurs	non	oui	non
n_i	Nombre de paris sur le résultat i (i=1,N ou 2)	non	oui	non
m_i	Mise moyenne sur le résultat i	non	oui	non
x_i	Cote du bookmaker ou de la FdJ	oui	oui	oui
p_i	Probabilité du résultat i estimée par le bookmaker ou la FdJ	non	oui	oui
q_i	Probabilité du résultat i estimée par la moyenne des joueurs	difficilement	oui	non
M	Somme totale misée sur le match	non	oui	non
m	Somme moyenne misée par parieur	non	oui	non
α	Taux de prélèvement du bookmaker sur les mises (sa marge !)	non	oui	oui

Rappel : la cote x_i du bookmaker ou de la FdJ est le nombre par lequel il multiplie la mise pour calculer les gains du parieur en cas de bon pronostic.

Relations entre les variables :

variable	Est égale à
N	$\sum_{i=1}^{3} n_i$
q_i	$\frac{n_i}{N}$

variable	Est égale à
M	$\sum_{i=1}^{3} n_i m_i$
m	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_i m_i$

Commentaire :

- pour décider si un élément était connu ou non, on a examiné pour chacune des trois catégories de parieurs concernées (joueurs, FdJ, bookmakers) si ceux ci avaient les moyens, EN COURS DE PERIODE DE PARI, d'accéder à cet élément (et donc de modifier leurs choix de pari, pour les joueurs, ou de cotes, pour les books et la FdJ).
- Il se trouve donc que la FdJ et les joueurs, qui font leurs paris ou leurs cotes AVANT la période de pari sont sur un certain pied d'égalité.
- le joueur a d'ailleurs même en théorie un petit avantage sur la FdJ, puisque, s'il est avisé, il attendra les derniers moments de la période de pari pour faire le sien, et donc bénéficier des toutes dernières informations
- les bookmakers, au contraire, qui ont la possibilité de modifier leurs cotes jusqu'à la fin de cette période, et donc peuvent utiliser beaucoup d'information fiable et objective, ont un avantage énorme.
- néanmoins, la FdJ a accès à toutes les données après la période de tirage, et peut donc utiliser cette expérience pour les tirages suivants, ce qui rend le jeu moins équitable qu'il n'en a l'air (elle peut en outre annuler un ou plusieurs matches si les affaires semblent mal tourner, et bénéficie ainsi d'une facilité certaine pour "éviter de perdre", contrairement au joueur "ordinaire").

Donc, sur cette simple analyse de l'accès à l'information, les bookmakers et la FdJ ont déjà qualitativement un moyen de biaiser le jeu en leur faveur. Mais ce n'est pas leur seul avantage. Ils ont surtout la capacité de fixer les cotes, ce qui constitue un moyen formidable de faire pencher la balance en leur faveur : c'est ce qu'on tente d'expliquer dans les paragraphes suivants.

3 Espérance de gain du bookmaker (ou de la FdJ)

On ne reviendra pas sur la notion d'espérance mathématiques en probabilités qui sera utilisée dans les lignes qui suivent (on estime que le lecteur qui est parvenu jusqu'à cette ligne possède un bagage suffisant pour que le webmaster s'évite une explication détaillée).

Pour les moins à l'aise, l'espérance mathématique (notée $E(X)$, où X représente la variable aléatoire étudiée, ici le gain ou la perte du bookmaker à l'issue d'un match) est le gain que le bookmaker pourrait obtenir en moyenne si on jouait le match un grand nombre de fois (exemple : l'espérance mathématique d'un jet de dé à 6 faces est de 3.5 si chaque face a la même chance de sortir). Comme chaque match n'est joué qu'une fois, cette estimation du gain pourrait sembler n'avoir aucun sens. En fait, comme il y a de nombreux matches, cette valeur "limite" du gain du bookmaker est quand même pertinente.

Et si c'est vraiment trop compliqué, il suffit de retenir que cette valeur représente en gros le gain moyen du bookmaker.

Examinons ce que le bookmaker gagne en fonction du résultat du match considéré :

Résultat du match	Gain (éventuellement négatif = perte) du bookmaker ou de la FdJ
1	$n_1 m_1 (1 - x_1) + n_2 m_2 + n_3 m_3$
N	$n_1 m_1 + n_2 m_2 (1 - x_2) + n_3 m_3$
2	$n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 (1 - x_3)$

Sachant que le bookmaker "parie" que les résultats 1,N,2 sortiront avec des probabilités p_1, p_2, p_3, l'espérance mathématique de son gain s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} E(X) = {} & p_1.\left(n_1 m_1 (1 - x_1) + n_2 m_2 + n_3 m_3\right) \\ & + p_2.\left(n_1 m_1 + n_2 m_2 (1 - x_2) + n_3 m_3\right) \\ & + p_3.\left(n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 (1 - x_3)\right) \end{aligned}$$

Soit encore, en faisant intervenir le nombre N de paris effectués :

$$E(X) = N\left[p_1.\left(\frac{n_1}{N} m_1 (1 - x_1) + \frac{n_2}{N} m_2 + \frac{n_3}{N} m_3\right) + p_2.\left(\frac{n_1}{N} m_1 + \frac{n_2}{N} m_2 (1 - x_2) + \frac{n_3}{N} m_3\right) + p_3.\left(\frac{n_1}{N} m_1 + \frac{n_2}{N} m_2 + \frac{n_3}{N} m_3 (1 - x_3)\right)\right]$$

$$E(X) = N\left[p_1.\left(q_1 m_1 (1 - x_1) + q_2 m_2 + q_3 m_3\right) + p_2.\left(q_1 m_1 + q_2 m_2 (1 - x_2) + q_3 m_3\right) + p_3.\left(q_1 m_1 + q_2 m_2 + q_3 m_3 (1 - x_3)\right)\right]$$

$$E(X) = N \left[\sum_{i=1}^{3} p_i \sum_{i=1}^{3} q_i m_i - \sum_{i=1}^{3} p_i q_i m_i x_i \right]$$

et finalement, sachant que $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$

$$\boxed{E(X) = N \left[\sum_{i=1}^{3} q_i m_i - \sum_{i=1}^{3} p_i q_i m_i x_i \right]} \qquad [1]$$

C'est la formule la plus générale, qui ne fait aucune hypothèse sur les valeurs des différents paramètres.

4 Les stratégies du bookmaker

Par souci de simplification, on va supposer que les mises moyennes sur les trois résultats sont identiques (le bookmaker lui dispose de l'information vraie et n'est pas obligé de passer par cet artifice, ce qui lui laisse le loisir d'affiner le raisonnement suivant autant et aussi souvent qu'il le souhaite !).

On pose donc : $m_1 = m_2 = m_3 = m$

La relation [1] se simplifie alors un peu :

$$\boxed{E(X) = Nm\left[\sum_{i=1}^{3} q_i - \sum_{i=1}^{3} p_i q_i x_i\right] = Nm\left[1 - \sum_{i=1}^{3} p_i q_i x_i\right]} \qquad [1']$$

(car comme précédemment : $\sum_{i=1}^{3} q_i = 1$)

Les stratégies du bookmaker peuvent alors se mettre en œuvre.

4.1 *le bookmaker honnête*

Il va de soit que cette sorte de bookmaker n'existe pas; mais son existence fictive va permettre d'expliquer plus loin comment nos bookmakers "réels" s'assurent de TOUJOURS gagner.

Donc pour ce brave homme virtuel, l'essentiel est de rendre le jeu équitable, c'est à dire que personne ne gagne ni ne perde. Pour cela, il faut que $E(X) = 0$.

Pour s'en assurer, il faut fixer astucieusement les cotes. En regardant l'égalité [1'], notre naïf bookmaker peut s'apercevoir qu'il a deux possibilités évidentes : $x_i = \frac{1}{q_i}$ ou $x_i = \frac{1}{p_i}$.

Dans le premier cas la relation [1'] devient en effet :

$$E(X) = Nm\left[1 - \sum_{i=1}^{3} p_i q_i \frac{1}{q_i}\right] = Nm\left[1 - \sum_{i=1}^{3} p_i\right] = Nm\left[1 - 1\right] = 0$$

ce qui permet d'atteindre le but recherché.

Dans le deuxième cas le résultat est le même puisque p_i et q_i jouent un rôle symétrique dans la relation [1']. Mais la première solution est beaucoup plus avantageuse pour le bookmaker parce qu'il n'a même plus besoin de faire de pari. En effet, quelles que soient les valeurs de p_i qu'il a estimées, et même s'il se trompe très grossièrement, en choisissant $x_i = \frac{1}{q_i}$ le résultat final sera le même (gain ou perte nuls).

4.2 le bookmaker "réel"

Ce bookmaker que tout le monde connaît a deux caractéristiques qui le distinguent du spécimen précédent :

- il doit sortir ses cotes AVANT de connaître les paris des joueurs (donc a priori il ne connaît pas tout de suite les q_i et doit les estimer)
- il a très envie d'avoir une espérance de gain positive

Pour résoudre son premier problème, il n'a pas beaucoup d'alternatives : il doit supposer ses parieurs aussi bons (ou aussi mauvais) que lui et donc supposer que les paris seront tels qu'à la fin $q_i = p_i$ (il aura cependant tout le temps par la suite pendant la période des paris de surveiller l'évolution de la relation [1'] et de modifier ses cotes x_i de façon à s'assurer que *E(X)* reste toujours positif).

Dans ces conditions, son espérance de gain [1'] devient :

$$E(X) = Nm\left[1 - \sum_{i=1}^{3} p_i p_i x_i\right] = Nm\left[1 - \sum_{i=1}^{3} p_i^2 x_i\right] \quad [1'']$$

et s'il était le bookmaker honnête, il fixerait $x_i = \frac{1}{p_i}$.

Mais en fait cela l'embête à deux titres.

- Tout d'abord, il n'est pas du tout certain que les parieurs auront le même avis que lui sur les paris, donc il existe une incertitude très dommageable sur q_i car elle est capable de rendre la relation [1''] non représentative, et la relation [1'] (qui s'applique alors) négative. D'où perte sèche.
- Par ailleurs, il n'est pas très sûr non plus de ses prévisions p_i

Donc il va "travailler" ses cotes de façon à se garantir un résultat positif. Et donc modifier les x_i de façon à s'assurer une certaine marge sur *E(X)*.

A partir de là, les méthodes exactes des bookmakers et leurs recettes ne peuvent être que des conjectures. Ils peuvent par exemple modifier leurs trois cotes (1,N,2) de la même manière en posant par exemple

$$\boxed{x_i = \frac{1}{p_i}(1-\alpha)} \quad [2]$$

où α est choisi en fonction de la marge que veut s'attribuer le bookmaker.

Il lui sera loisible ensuite en cours de période de pari de vérifier si les p_i et les q_i restent proches, et sinon de modifier les cotes selon

$$\boxed{x_i = \frac{1}{q_i}(1-\alpha)} \quad [2']$$

pour diminuer ses risques (car les q_i sont connus avec une grande certitude, alors que les p_i sont aussi difficiles à estimer pour le bookmaker que pour le parieur), et donc s'assurer un gain net avec des alea nettement réduits.

4.2.1 Espérance de gain avec l'hypothèse [2] :

$$E(X) = Nm\left[1-\sum_{i=1}^{3} p_i^2 x_i\right] = Nm\left[1-\sum_{i=1}^{3} p_i^2 \frac{1}{p_i}(1-\alpha)\right] = Nm\left[1-(1-\alpha)\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i^2}{p_i}\right]$$

$$E(X) = Nm\left[1-(1-\alpha)\sum_{i=1}^{3} p_i\right] = Nm\left[1-1+\alpha\right]$$

$$E(X) = Nm\alpha$$

où α est le pourcentage prélevé sur les mises par le bookmaker [3]

4.2.2 Espérance de gain avec l'hypothèse [2']

Le bookmaker peut largement réduire ses risques, puisqu'il est alors supposé connaître les répartitions de mises q_i.

Son espérance de gain peut dans ce cas se calculer avec la relation [1'] qui ne fait plus intervenir d'hypothèse sur les mises des parieurs et donc est beaucoup plus précise. Ce qui s'écrit alors :

$$E(X) = Nm\left[1-\sum_{i=1}^{3} p_i q_i x_i\right] = Nm\left[1-\sum_{i=1}^{3} p_i q_i \frac{1}{q_i}(1-\alpha)\right]$$

qui conduit à la même expression [3] du gain du bookmaker, MAIS sans aucune hypothèse sur les valeurs de q_i ce qui réduit considérablement les risques du bookmaker.

En fait, le bookmaker a la possibilité s'il le souhaite d'affiner encore beaucoup plus son bilan en utilisant la formule plus générale [1] qui ne fait plus intervenir d'hypothèse sur

AUCUNE grandeur et donc lui garantit un gain sans alea aucun. Il peut ainsi calculer chacune des marges α_i sans aucune erreur et donc proposer des cotes au plus juste.

4.3 La FdJ

N'ayant pas la possibilité de réviser ses cotes pendant la période de pari, la FdJ doit se contenter de jouer suivant le modèle [2], ce qui augmente ses risques (et explique en partie pourquoi ses cotes sont moins attractives que celles des (bons) bookmakers).

5 Comment savoir quelles marges les bookmakers (et la FdJ) s'octroient

5.1 Estimation de la marge

Supposons que le bookmaker utilise la relation [2] pour se garantir un gain net. Comme on connaît ses cotes x_i, il est facile de remonter à une estimation du pourcentage de prélèvement sur les mises (et donc à son espérance de gain).

Pour cela on doit à nouveau faire l'hypothèse d'une mise moyenne m égale sur les trois résultats possibles du match (1,N,2). De [2] on déduit

$$p_i = \frac{1-\alpha}{x_i}$$

et de $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, on déduit la relation qui permet d'estimer α (inconnu) à partir des x_i (connus) :

$$\boxed{\alpha = 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i}}} \qquad [4]$$

5.2 *Exemples (tirés de cotes publiées sur Internet ou par la FdJ)*

Cotes Ligue 1 journée du 22 au 23 janvier 2005.

FdJ :

Metz	Marseille	2.7	2.65	2
St Etienne	PSG	1.95	2.6	2.85
Bastia	Nice	1.95	2.6	2.85
Caen	Auxerre	2.7	2.65	2
Istres	Strasbourg	1.95	2.6	2.85
Monaco	Lens	1.35	3.2	5.1
Rennes	Ajaccio	1.5	2.95	4.1
Sochaux	Bordeaux	1.85	2.65	3.05
Toulouse	Nantes	1.6	2.8	3.75
Lille	Lyon	2.4	2.55	2.3

Bookmaker :

Metz	Marseille	2.7	2.9	2.55
St Etienne	PSG	2.55	2.9	2.7
Bastia	Nice	2.45	2.8	2.9
Caen	Auxerre	2.8	2.8	2.5
Istres	Strasbourg	2.4	2.9	2.9
Monaco	Lens	1.51	3.4	6.5
Rennes	Ajaccio	1.67	3	5.6
Sochaux	Bordeaux	2.25	2.8	3.25
Toulouse	Nantes	1.83	3	4.35
Lille	Lyon	2.65	2.8	2.65

En effectuant ligne par ligne les estimations au moyen de la relation [4] sur chacun des deux tableaux précédents, on trouve pour les marges des deux organismes de jeu :

FdJ :

Metz	Marseille	19.9%
St Etienne	PSG	19.9%
Bastia	Nice	19.9%
Caen	Auxerre	19.9%
Istres	Strasbourg	19.9%
Monaco	Lens	20.0%
Rennes	Ajaccio	20.0%
Sochaux	Bordeaux	19.7%
Toulouse	Nantes	19.9%
Lille	Lyon	19.6%

Bookmaker

Metz	Marseille	9.7%
St Etienne	PSG	9.7%
Bastia	Nice	9.9%
Caen	Auxerre	10.3%
Istres	Strasbourg	9.6%
Monaco	Lens	9.9%
Rennes	Ajaccio	10.0%
Sochaux	Bordeaux	9.9%
Toulouse	Nantes	9.9%
Lille	Lyon	10.1%

Soit une variation des marges quasiment du simple au double.

On a sur cet exemple une illustration :

1. du montant des marges que s'octroient les sites de jeux (>10%, ce qui, en rendement sur de l'argent qui ne vous appartient pas, est colossal)
2. de la "prime d'incertitude" que la FdJ estime devoir s'octroyer (+10% par rapport au bookmaker, soit la modique marge de 20% !!!)